

## Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion  $y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

### 1. Grenzwverhalten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow \text{~}$$

### 2. Nullstellen

**Bed.:  $f(x) = 0$ :**  $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

**Rate eine Nullstelle:**  $x_0 = 1$

$$f(1) = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$$

**Polynom reduzieren:**

**Polynomdivision**

$$\begin{array}{r} (x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1) = x^2 + 5x + 6 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline 5x^2 + x \\ -(5x^2 - 5x) \\ \hline 6x - 6 \\ -(6x - 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

**Alternativ: Horner-Schema**

$a_3$ (a)	$a_2$ (b)	$a_1$ (c)	$a_0$ (d)
1	4	1	-6
1	1	5	6
1	5	6	0

Restpolynom:  $x^2 + 5x + 6$

**Weitere Nullstellen:**

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}$$

$$x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = -3$$

**Die Funktion besitzt die Nullstellen -3, -2, 1.**

### 3. Extremwerte

**Notwendige Bedingung:  $f'(x) = 0$ :**

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 1$$

$$3x^2 + 8x + 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \quad | :3$$

$$x_{1,2} = -\frac{8}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{6}\right)^2 - \frac{1}{3}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{13}{9}}$$

$$x_1 = -0.13 \quad \vee \quad x_2 = -2.54$$

**Hinreichende Bedingung:  $f''(x_E) \neq 0$ :**

$$f''(x) = 6x + 8$$

$$f''(-0.13) = 7,22 > 0 \Rightarrow \text{TP bei } x = -0.13$$

$$f''(-2,54) = -7,24 < 0 \Rightarrow \text{HP bei } x = -2.54$$

**Koordinaten der Extremwerte:**

$$f(-0.13) = -6,06$$

$$f(-2,54) = 0,88$$

**Die Funktion besitzt die Extremwerte:**

**TP (-0,13 | -6,06) und HP (-2,54 | 0,88).**

### 4. Wendepunkt

**Notwendige Bedingung:  $f''(x) = 0$ :**

$$f''(x) = 6x + 8 \quad f'''(x) = 6$$

$$6x + 8 = 0$$

$$6x = -8$$

$$x = -\frac{8}{6} = -1,33$$

**Hinreichende Bedingung:  $f'''(x_w) \neq 0$ :**

$$f'''(-1,33) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{WP bei } x = 1,33$$

$$f(-1,33) = -2,59 \quad \text{WP} (-1,33 | -2,59)$$

$$f'''(-1,33) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Übergang Rechts- nach Links-Krümmung}$$

### 5. weitere Funktionswerte

**Schnittpunkt mit y-Achse:  $f(0) = -6$**

$$f(1,5) = 7,87$$

$$f(-3,5) = -3,37$$

oder kleine Wertetabelle

### 6. Skizze

